12/12/19

Μεθοδοι R-K

ΠΑΤ : $\begin{cases} y' = f(t,y) & ,t\in[\alpha,b] \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$

ΤΑΤ R-K : $\left.\begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h \sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ y^{n+1} = y^n + h \sum\limits_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}\right\}$ $n=0,1,2,\dots,N-1$

Μορφή Μητρώου

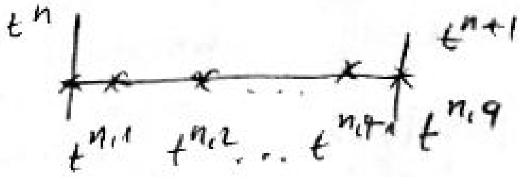
$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

,όπου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{q,q}$

$\tau^T = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q)^T \in \mathbb{R}^q$

$b^T = (b_1, b_2, \dots, b_q)^T \in \mathbb{R}^q$

Εχω δημιουργησει σε κάθε διαστημα του κλειστου $[\alpha,b]$ μια διαμέριση, αυξάνοντας την ακριβεια, τους υπολογισμούς.



Άμεσες μέθοδοι R-K:

Αν A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός, $a_{ij} = 0$ $\forall j \geq i$

δηλ $\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$, τότε η R-K Μέθοδος είναι άμεση

και διαδοχικά μπορούμε να υπολογ. τα $y^{n,i}$, y^{n+1}, $i=1,2,\dots,q$

Πεπλεγμένες μεθ. R-K :

Αν A είναι πυκνός δηλ. δεν υπάρχουν $a_{ij}=0$, τότε η μέθοδος R-K είναι πεπλεγμένη. Τότε ενδεχόμενα πρέπει να λύσουμε σύστημα: $A\bar{y}=\bar{b}$, $A\in\mathbb{R}^{q,q}$

Gauss elimin $O(q^3)$, LU decompostion $O(q^2)$, Gradient methods $O(q)$

τρόποι που λύνεις το σύστημα. (αλλά να είναι γραμμικό, δηλ. A να μην εξαρτάται από το y)

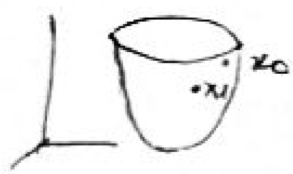
Εξίσωση Σφάλματος

Αν έχω $ax^2+\beta x=\gamma \Rightarrow$

$ax^2+\beta x-\gamma=0$

$\downarrow$

εξ. σφ



Άρα έχω $y(x)=ax^2+\beta x-\gamma=0$

δηλ. παραβολή:

η LU δεν δουλεύει τόσο σε μεγάλους πίνακες, ενώ η Gradient μπορεί

Παραδείγματα (SOS)

(1) Έστω το μητρώο $\begin{array}{c|c}0&0\\\hline &1\end{array}$ $(q=1)$

δείξτε ότι είναι η μεθ. του Euler.: καταλήγει στο $y^{n+1}=y^n+hf(t^n,y^n)$

(2) Έστω το μητρώο $\begin{array}{c|c}1&1\\\hline &1\end{array}$ $(q=1)$

δείξτε ότι είναι η πεπλ. Euler. καταλήγει στο $y^{n+1}=y^n+hf(t^{n+1},y^{n+1})$

(3) Έστω το μητρώο $\begin{array}{c|c}1/2&1/2\\\hline &1\end{array}$ $(q=1)$

δείξτε ότι είναι η μεθ. του Μέσου.

καταλήγει στο $y^{n+1}=y^n+hf\left(t^n+\frac{h}{2},\frac{1}{2}(y^n+y^{n+1})\right)$

(4) Έστω το μητρώο
$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array} \quad (q=2)$$

περιγράφει τη μέθοδο του Τραπεζίου

κανένα συναρτ. υπολ. στην αρχή του διαστήματος και δύο συναρτ. υπολ. στο τέλος του διαστήματος

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + 0h = y^n, \quad t^{n,1} = t^n + 0\cdot h = t^n \\ y^{n,2} = y^n + h\left(\frac{1}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{1}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2})\right) \end{cases}$$

$$t^{n,2} = t^n + h = t^{n+1}$$

$$y^{n+1} = y^n + h\left(\frac{1}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{1}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2})\right)$$

$y^{n+1} = y^{n,2}$ και $y^n = y^{n,1}$

Άρα $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left(f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right)$

Παραδείγματα

(5)
$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline & & \end{array} \quad (q=2)$$

δηλ. ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
δηλ. είναι γνήσια κάτω τριγωνικός άρα είναι άμεση R-K

(λέγεται βελτιωμένη μεθ. Euler)

$$\left.\begin{cases} y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n) \\ y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,2}\right) \end{cases}\right\} \Rightarrow y^{n+1} = y^n + hf\left(t^{n+1/2}, y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)\right)$$

(6)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1/6 & 2/3 & 1/6 & \end{array}$$

$(q=3)$

τρεις συναρτ. υπολ. που είναι στην αρχή, στη μέση και στο τέλος.

Είναι Άμεση μεθ. R-K τρίτης τάξης

$t^{n,1} = t^n$

$t^{n,2} = t^{n+1/2}$

$t^{n,3} = t^{n+1}$

η τάξη καθορίζεται από το q

(7) R-K τέταρτης τάξης (RK4)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & \end{array}$$

→ τα βάρη

→ $t^{n,1} = t^n$

→ $t^{n,2} = t^{n+1/2}$

→ δύο συναρτ. υπολ. στο ίδιο σημείο → $t^{n,3} = t^{n+1/2}$

→ $t^{n,4} = t^{n+1}$

Είναι άμεση RK αφού κ. τριγ.

$y^{n,1} = y^n, \; t^{n,1} = t^n$

$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \quad , t^{n,2} = t^{n+1/2}$

$y^{n,3} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \quad , t^{n,3} = t^{n+1/2}$

$y^{n,4} = y^n + h f(t^{n,3}, y^{n,3}) \quad , t^{n,4} = t^{n+1}$

$$y^{n+1} = y^n + h\Big[\tfrac{1}{6} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \tfrac{1}{3} f(t^{n,2}, y^{n,2}) + \tfrac{1}{3} f(t^{n,3}, y^{n,3}) + \tfrac{1}{6} f(t^{n,4}, y^{n,4})\Big] + O(h^5), \; t^{n+1}$$

έχει σφάλμα: $O(h^5)$

Τάξη ακρίβειας 4, συνέπεια $5^{ης}$ τάξης.

(72)

Επιλυσιμότητα μεθόδων RK

(1) Στην περίπτωση των άμεσων RK τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά οπότε είναι καλώς ορισμένα, δηλ. μονοσήμαντα

(2) Το πρόβλημα έγκειται στις πεπλεγμένες RK μεθόδους. Για μικρό h, όμως, το πρόβλημα έχει λύση.

Πρόταση : (Ύπαρξη και Μοναδικότητα προσεγγίσεων)

Έστω το Π.Α.Τ. : $\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Η f να είναι συνεχής και να ισχύει για αυτήν η συνθήκη του Lipschitz, δηλ.

$$\exists L \geq 0, \forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}: \left| f(t,y_1) - f(t,y_2) \right| \leq L|y_1 - y_2|$$

Έστω ότι $h < \frac{1}{\gamma}$, $\gamma = L \max\limits_{1 \leq i \leq q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$ → παίρνω κάθε γραμμή, αθροίζω τους όρους και παίρνω το μεγαλύτερο, κάθε γραμμής

Τότε το σύστημα:

$$y^{n,i} = y^n_0 + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

λύνεται μονοσήμαντα ως προς τα $y^{n,i}$, $i = 1, \ldots, q$.

(αν ορίζουσα = 0 άπειρες λύσεις (αόριστο)
πρέπει $|A| \neq 0$ για να έχει λύση

Απόδειξη

Θεωρούμε την απεικόνιση: $\bar{F} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$

τω $F_i(\bar{x}) = y^n + h \sum a_{ij} f(t^{n,j}, x_j)$,

όπου $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)^T$ $\quad 1 \le i \le q$

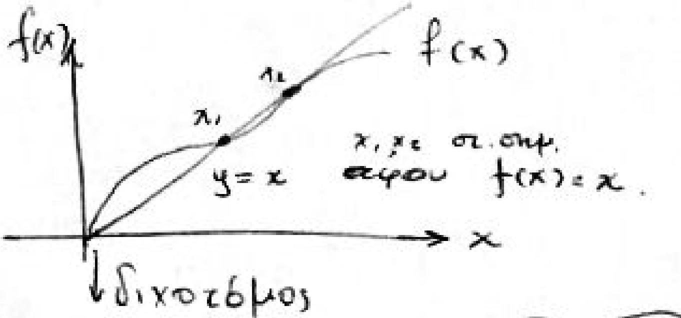
$\bar{F}(\bar{x}) = (F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x}), \dots, F_q(\bar{x}))$

Αρκεί ν.δο. για $h < \frac{1}{\gamma}$, η F να έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, δηλ. αρκεί ν.δο η $\bar{F}(\bar{x})$ είναι <u>συστολή.</u> Το σταθερό σημείο είναι το $\bar{y} = (y^{n,1}, y^{n,2}, \dots, y^{n,q})^T$. Θα χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη του L για την f.

★

<u>Σταθ. Σημ.</u>

Εστω $f(x)$, τότε ορίζω την $F(x) = f(x) - x$, όταν το $F(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι σταθερό σημείο



Παρατήρηση:

(1) Το γενικά μη-γραμ. σύστημα $y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})$ (*) έχει μοναδική λύση όταν $h < \frac{1}{\gamma}$

(2) Όταν η σταθερά Lipschitz είναι μεγάλη, η συνθήκη αυτή αποτελεί σοβαρό περιορισμό του h

$(\gamma = L \max_i \sum_j |a_{ij}|)$

(3) Η λύση $\bar{Y}^n = (Y^{n,i}) \in \mathbb{R}^q$ του μη-γραμ. εν γένει συστήματος του (*) μπορεί να προσεγγιστεί με δύο τρόπους:

πως λύνω το (*) στο παράδ. ($f = y^2$)

(1) Απλή επαναλ. μεθ. ή μεθ. σταθ. σημείου

$$Y^n_{(\ell+1)} = F(Y^n_{(\ell)}), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

(2) Μεθ. του Νεύτωνα
(ή παραλλαγή της)

• Για μία διάσταση

Έστω μια αρχική προσέγγιση, τότε μια επανάληψη της μεθ. δίνει

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = (x_1 - x_0) + \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x_0)(x_1 - x_0) + g(x_0) = 0$$

↓ Taylor; 1ης τάξης πληροφορία (σημαίνει ότι έχω γραμμικοποιήσει στη γειτονιά του x_0, πάω με ένα βηματάκι από το x_0 στο x_1)

fsolve μεθ. ελαχιστοποίησης στο Matlab

για να το λύσω (*) →

παραδ.

$$y^{n,1} = y^n + h\big(a_{11} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + a_{12} f(t^{n,2}, y^{n,2})\big)$$

$$y^{n,2} = y^n + h\big(a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + a_{22} f(t^{n,2}, y^{n,2})\big)$$

• Έστω $f = y$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + h(a_{11} y^{n,1} + a_{12} y^{n,2}) \\ y^{n,2} = y^n + h(a_{21} y^{n,1} + a_{22} y^{n,2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - h a_{11} & -h a_{12} \\ -h a_{21} & 1 - h a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(Άρα να βρω ορίζουσα πίνακα ≠0 και να το αντιστρέψω A^{-1})

• Έστω $f = y^2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - h a_{11} y^{n,1} & -h a_{12} y^{n,2} \\ -h a_{21} y^{n,1} & 1 - h a_{22} y^{n,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

• Για περισσότερες διαστάσεις : διανύσματα $\bar{x} \in \mathbb{R}^q$:

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \frac{\bar{g}(x_0)}{J(x_0)} \quad , \quad J = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)$$

η νέα λύση

Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_1} & \frac{\partial g_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial x_q} \end{pmatrix}$$

Μια παραλλαγή της μεθ. του Νευτ. είναι να πάρω δεύτερης τάξης πληροφορία

Η μεθ. του Ν. έχει τετραγωνική σύγκλιση